Получим всё-таки

формулу Родрига,

которая нам даст явное выражение для нахождения КОПов.

Шаг 1.

Будем плясать от полученного ОУШЛ:

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n}{dx}\right)+\lambda_n\rho(x)p_n(x)=0$$

Перепишем с использованием прямой пропорциональности:

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n}{dx}\right)\sim\ \rho(x)p_n(x)$$

Докажем, что для натуральных m<=n

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma^{m+1}(x)\rho(x)p_n^{(m+1)}(x)\right)\sim\sigma^{m}(x)\rho(x)\,p_n^{(m)}(x)$$

Это легко. Вспомним свойство 3: если мы все многочлены из СКОП продифференцируем, то у нас по прежнему будет СКОП, только вес домножится на σ(x). Если ещё раз продифференцируем – то ещё раз домножится на σ(x)… Продифференцируем m раз – вес будет $\sigma^m(x)\rho(x)$.

Вот мы как раз и решили продифференцировать m-1 и для полученной СКОП записать ОУШЛ. По сравнению с оригинальным ОУШЛ

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n}{dx}\right)\sim\ \rho(x)p_n(x)$$

Мы исправили p на его m-ю производную, первую производную p на (m+1)-ю, а вес ρ(x) на $\sigma^m(x)\rho(x)$. Вот и получили :

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma^{m+1}(x)\rho(x)p_n^{(m+1)}(x)\right)\sim\sigma^{m}(x)\rho(x)\,p_n^{(m)}(x)$$

Или, что то же самое:

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma^{m}(x)\rho(x)\,p_n^{(m)}(x)\right)\sim\sigma^{m-1}(x)\rho(x)p_n^{(m-1)}(x)$$

Шаг 2, вариант 1.
Теперь давайте запишем их в ряд, уменьшая m:

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma^{m}(x)\rho(x)p_n^{(m)}(x)\right)\sim\sigma^{m-1}(x)\rho(x)p_n^{(m-1)}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma^{m-1}(x)\rho(x)p_n^{(m-1)}(x)\right)\sim\sigma^{m-2}(x)\rho(x)p_n^{(m-2)}(x)$$

Левая часть каждой прямой пропорциональности – это производная от правой части прямой пропорциональности.
Если мы эту цепочку раскрутим, всё увеличивая и увеличивая порядок производных, до исходного ОУШЛ

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n}{dx}\right)\sim\ \rho(x)p_n(x)$$

то получим

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\sigma^{m}(x)\rho(x)p_n^{(m)}(x)\right)\sim\rho(x)p_n(x)$$

Если вам непонятно, откуда взялась m-тая производная, предложу другое рассуждение.

Шаг 2, вариант 2.
От прямой пропорциональности, полученной в шаге 1

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma^{m}(x)\rho(x)p_n^{(m)}(x)\right)\sim\sigma^{m-1}(x)\rho(x)p_n^{(m-1)}(x)$$

верной для всех m, для обеих частей возьмём (m-1)-тую производную. Учтём, что слева одна производная уже есть, значит, и в итоге там будет m-тая производная.

$$\left(\sigma^{m}(x)\rho(x)p_n^{(m)}(x)\right)^{(m)}\sim\left(\sigma^{m-1}(x)\rho(x)p_n^{(m-1)}(x)\right)^{(m-1)}$$

И вот уже теперь уже будем записывать в ряд для разных m:

$$\left(\sigma^{m}(x)\rho(x)p_n^{(m)}(x)\right)^{(m)} \sim \left(\sigma^{m-1}(x)\rho(x)p_n^{(m-1)}(x)\right)^{(m-1)}$$

$$\left(\sigma^{m-1}(x)\rho(x)p_n^{(m-1)}(x)\right)^{(m-1)} \sim \left(\sigma^{m-2}(x)\rho(x)p_n^{(m-2)}(x)\right)^{(m-2)}$$

Левая часть каждой прямой пропорциональности – это в точности правая часть предыдущей прямой пропорциональности.
Если мы так раскрутим до исходного ОУШЛ

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n}{dx}\right) \sim \rho(x)p_n(x)$$

То и получим

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\sigma^{m}(x)\rho(x)p_n^{(m)}(x)\right) \sim \rho(x)p_n(x)$$

Шаг 3.
Так или иначе получили

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\sigma^{m}(x)\rho(x)p_n^{(m)}(x)\right) \sim \rho(x)p_n(x)$$

Ура! Дело в том, что n-тая производная $p_n(x)$ константа (не забываем, что p_n – многочлен n-той степени). Эта константа свободно выносится из-под n-ной производной и в конце концов мы её можем отправить в прямую пропорциональность.

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\sigma^{n}(x)\rho(x)\right) \sim \rho(x)p_n(x)$$

Оооо, а в правой части то, что нам нужно! Почти! Сейчас только на ρ(x) поделим:

$$p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\sigma^n(x)\rho(x)\right)$$

Мы получили формулу Родрига для вычисления классических ортогональных многочленов!

Наличие индекса у коэффициента пропорциональности С говорит нам то, что константа не единая для всех СКОП, а мы вправе выбирать её любой для каждого многочлена.

Замечание: Боголюбов выписывает точные выражения для коэффициентов C_n. И они, если сделать кучу его подстановок, получаются очень сложные. Он там для их поиска считает СЗ ОЗШЛ и вообще дико запаривается.
Это всё делается с одной целью – нормировать полиномы, чтобы их норма была 1. Но ради этого приходится запоминать противные коэффициенты.
На мой взгляд, овчинка выделки не стоит.

Также Боголюбов на лекциях рассказывает производящую функцию. Она нахрен не нужна для понимания темы, но может попасться на экзамене. Поэтому её ботать в течение семестра смысла никакого нет. Я эту тему вынес в отдельную методичку «ММФ к экзамену».

Рассмотрим частные случаи КОПов.

Полиномы Якоби.

Наверное, эта фамилия прежде всего ассоциируется с якобинцами, Великой Французской революции, когда всем рубили головы… Якоби (родившийся, правда, уже в 19-м веке) вот тоже не удержался и решил порубить числовую прямую, установив a=-1, b=1.
(Я знаю, что аналогия тупая, но, как правило, чем тупее аналогия, тем лучше она запоминается. Только из этих соображений).
Т.к. по определению

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a \neq -\infty,\ b \neq +\infty \\ (x-a) & ,\ a \neq -\infty,\ b = +\infty \\ (b-x) & ,\ a = -\infty,\ b \neq +\infty \\ 1 & ,\ a = -\infty,\ b = +\infty \end{cases}$$

То для полиномов Якоби сразу запишем

$$\sigma(x) = 1 - x^2$$

Сигма, конечно, это хорошо, но нам гораздо интересней узнать вес. Он, очевидно, будет зависеть от выбора линейной функции.
Оказывается, что в зависимости от выбора линейной функции τ(x)=Ax+B мы получим двухпараметрическое семейство весов:

$$\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

Где $\alpha = -\frac{A+B}{2} - 1,\ \beta = \frac{B-A}{2} - 1.$

Полиномы Якоби обозначаются БОЛЬШОЙ буквой P, указывая сверху в скобках выбранные α и β: $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

По формуле Родрига с точностью до коэффициента

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \sim (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right\}$$

У полиномов Якоби есть три частных случая.
Первые два:

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to T_n(x) \sim P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}$$

— полином Чебышева I рода

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho(x) = \sqrt{1-x^2} \to U_n(x) \sim P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$$

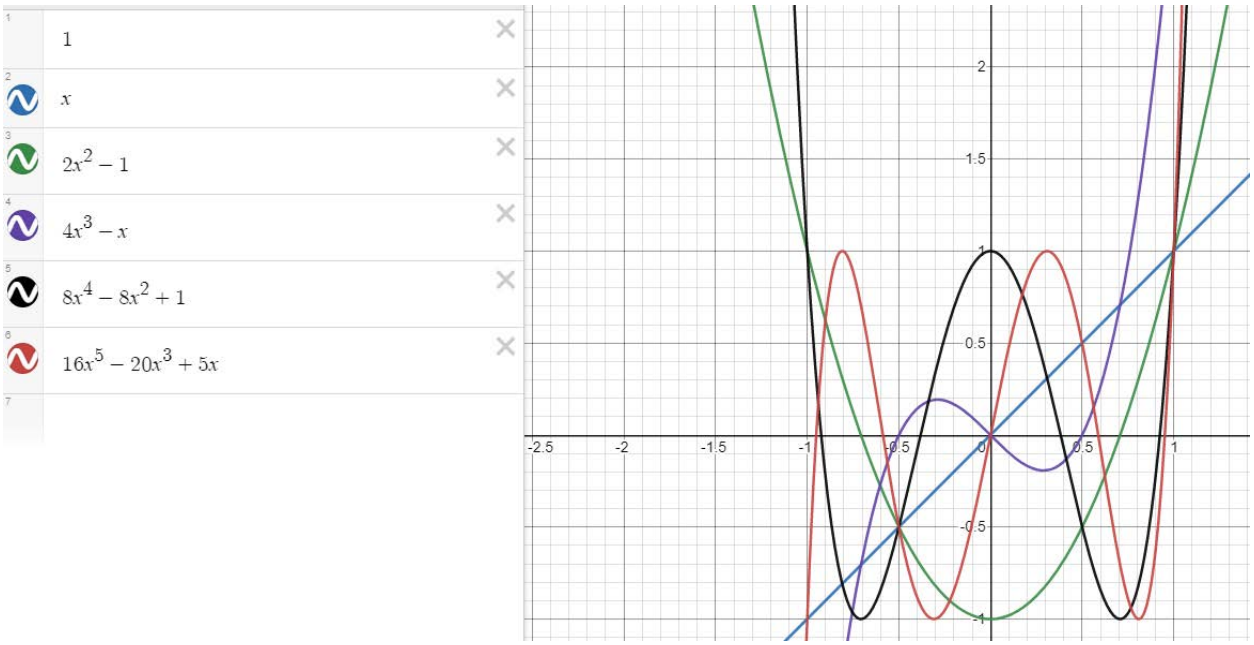
— полином Чебышева II рода

Обозначаются буквами T и U.

Сразу вопрос: а зачем они нужны?! В чём их прикол?!
Ну, нужны они, как сказал Боголюбов, в вычислительной математике. А вот ответить «В чём прикол» я могу и сейчас. Об этом умолчал Боголюбов, но не Википедия! Сейчас расскажу.
Скопируем из Википедии вид полиномов Чебышёва первого рода (недоверчивые Фомы могут проверить, формула для вычисления многочленов Чебышёва у них имеется)

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$
$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

И давайте построим графики:



А вот и обещанный прикол: за пределами [-1..1] они развлекаются как хотят, а вот внутри [-1..1] ютятся в квадрате – их абсолютные значения не превосходят 1!

Случайно ли это? Разумеется, нет. Давайте вернёмся… к школьному курсу тригонометрии.
Вне сомнения, вы помните формулу косинуса двойного угла

$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$

А если у вас школа была продвинутая, вам могли давать заодно ещё и формулу косинуса тройного угла

$\cos(3x)=4\cos^2(x)-3\cos(x)$

А если у вас не было такой формулы – вот вам вывод:

$\cos(3x)=\cos(2x+x)=\cos(2x)\cos(x)-\sin(x)\sin(2x)=$
$(2\cos^2(x)-1)*\cos(x)-\sin(x)*2*\sin(x)*\cos(x)=$
$2\cos^3(x)-\cos(x)-2\sin^2(x)*\cos(x)=$
$2\cos^3(x)-\cos(x)-2(1-\cos^2(x))*\cos(x)=$
$2\cos^3(x)-\cos(x)-2\cos(x)+2\cos^3(x)=$
$=4\cos^2(x)-3\cos(x)$

Что-то напоминает…

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Ну вот неслучайно ☺ Оказывается, что

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Теперь понятно, почему на [-1..1] многочлены Чебышёва ютятся в несчастном квадрате.

Пользуясь этим формулами, можно легко получить и рекуррентную формулу для полиномов Чебышёва:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Для многочленов Чебышёва второго рода простую тригонометрическую суть придумать сложно. Но рекуррентная формула есть и для них – причём та же, что и для первого рода, просто U_1 другой, нежели T_1:

$$U_0(x) = 1$$
$$U_1(x) = 2x$$
$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Если что, все эти развлекухи с косинусами Боголюбов не рассказывал и на экзамене не спросит, но вам для справки.

А нам в физике, как обещал Боголюбов, очень пригодится третий частный случай полиномов Якоби -

Полиномы Лежандра.

Французский математик Адриен Мари Лежандр, помимо того, что он был фанатом Якоби и придумал свои полиномы как частный случай полиномов Якоби, был лучшим другом как всех студентов, так и всех жителей антиутопии системы классических ортогональных полиномов. Всех очень бесило наличие веса-жандарма ρ(x), и Лежандр сделал то, чего хотели все и очень давно: положил его равным тождественным единице.
Как же похорошели классические ортогональные полиномы при Лежандре, стоило только убрать вес!

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_l(x)\,dx = 0,\ m \neq l$$

(от -1 до 1 – напомним, что Лежандр фанат Якоби и рассматривал свои полиномы только как частный случай его)
Ну в чистом виде скалярное произведение, без всяких дурацких весов!
Глядя на «якобинскую» формулу

$$\underline{\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}$$

Мы легко скажем, что для этого Лежандр положил

$$\alpha = \beta = 0$$

Формула Родрига даёт

$$P_n(x) \sim \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Полиномы Лагерра.

$$a = 0,\ b = +\infty \Rightarrow \sigma(x) = x$$

В качестве веса Лагерр выбрал

$$\rho(x) = e^{-x}x^{\alpha},\ \alpha \neq 0$$

Обсудим его выбор. У нас интеграл несобственный, от 0 до $+\infty$, следовало бы позаботиться о том, чтобы интеграл

$$\int_{a}^{b} p_m(x)p_l(x)\,dx = 0,\ m \neq l$$

сходился даже для полиномов самых больших степеней. Нужна какая-то быстро затухающая на правом конце функция, затухающая быстрее, чем

полином любой степени. На ум как раз сразу приходит e^{-x}. Ну и домножение на произвольную степенную функцию её быстрого убывания не губит.

Надо ещё проверить, что данный вес удовлетворяет уравнению Пирссона, т.е.

$\frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\rho(x)}$ (для многочленов Лагерра это $\frac{(xe^{-x}x^{\alpha})'}{e^{-x}x^{\alpha}}$)- линейная функция.

Проверяем и уберждаемся:

$$\frac{(xe^{-x}x^{\alpha})'}{e^{-x}x^{\alpha}} = \frac{(e^{-x}x^{\alpha+1})'}{e^{-x}x^{\alpha}} = \frac{-e^{-x}x^{\alpha+1} + (\alpha+1)e^{-x}x^{\alpha}}{e^{-x}x^{\alpha}} = -x + \alpha + 1$$

Обозначаются многочлены Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x)$$

Формула для них:

$$e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$$

Полиномы Эрмита.

Россия – щедрая душа, и Эрмит тоже был щедрым. И a, и b у него бесконечны:

$$\begin{cases} a = -\infty \\ b = +\infty \end{cases}$$

Из-за этого сигма наипростейшая, какая только может быть:

$$\sigma(x) = 1$$

Также Эрмит за нас выбрал вес ρ(x). Если Лежандр был фанатом Якоби, то Эрмит, видимо, фанатом Гаусса – именно поэтому весом он выбрал

$$\rho(x) = e^{-x^2}$$

(На самом деле выбор вполне логичный – у нас интеграл от $-\infty$ до $+\infty$, следовало бы позаботиться о том, чтобы интеграл

$$\int_a^b p_m(x)p_l(x)\,dx = 0,\ m \neq l$$

сходился даже для полиномов самых больших степеней. Нужна какая-то быстро затухающая на обеих концах функция, затухающая быстрее, чем полином любой степени. На ум сразу приходит экспонента, но нужно затухание сразу на двух концах одновременно. Учитывая дополнительное требование знакопостоянства весовой функцией, становится понятно, почему Эрмит выбрал именно e^{-x^2}).

Ну и не забудем проверить условие Пирссона:

$$\frac{\left(e^{-x^2}\right)'}{e^{-x^2}} = 2x$$

Выполняется.
А выглядят полиномы Эрмита так:

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$